Examen de Admisión a la Maestría

8 de Enero de 2016

Nombre: ____

Instrucciones: En cada reactivo seleccione la respuesta correcta encerrando en un círculo la letra correspondiente. Puede hacer cálculos en las hojas que se le proporcionaron.

Duración del examen: 2 horas

1. Sea V el espacio de vectorial de polinomios con coeficientes reales, de grado ≤ 3. Sea W el subespacio de todos los polinomios $p(x)$ en V tales que $p(0) = p(1) = p(-1) = 0$. Entonces $\dim V + \dim W$ es igual a

   (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

2. Sea $I \neq A \neq -I$, donde I es la matriz identidad y A es una matriz real 2×2. Si $A = A^{-1}$, entonces la traza de A es

   (a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) -1 (e) -2

3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces el conjunto de vectores X para los cuales $AX = X$ es

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a = 0 \quad \text{y} \quad b \text{ es arbitrario} \right\}$

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a \text{ es arbitrario} \quad \text{y} \quad b = 0 \right\}$

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a = -b \quad \text{y} \quad b \text{ es arbitrario} \right\}$

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

   (e) El conjunto vacío

4. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax^2 + by^3 &= c \\ dx^2 + ey^3 &= f \end{aligned}$$

   donde a, b, c, d y e son constantes reales y $ae \neq bd$. El número máximo de soluciones reales (x, y) del sistema es

   (a) ninguna (b) una (c) dos (d) tres (e) cinco

5. Sea A una matriz 3×3. ¿Cuál de las siguientes condiciones NO IMPLICA que A es invertible?

   (a) $-A$ es invertible.

   (b) Existe un natural k tal que $\det(A^k) \neq 0$.

   (c) Existe un natural k tal que $(I - A)^k = 0$, donde I es la matriz identidad 3×3.

   (d) El conjunto de vectores de la forma Av, donde $v \in \mathbb{R}^3$, es $\mathbb{R}^3$.

   (e) Existen 3 vectores linealmente independientes $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, tales que $Av_i \neq 0$ para todo i.

6. ¿Cuál de los siguientes es una base *ortonormal* para el espacio generado por las columnas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$?

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ (e) $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

7. Sea ℓ la recta que se obtiene al intersectar los planos $x+y+z = 3$ y $x-y+z = 5$ en $\mathbb{R}^3$. La ecuación del plano ortogonal a ℓ y que pasa por $(0, 0, 0)$ es:

   (a) $x - z = 0$

   (b) $x + y + z = 0$

   (c) $x - y - z = 0$

   (d) $x + z = 0$

   (e) $x + y - z = 0$

8. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 18 & 26 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 9 & 21 & 33 & 45 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$ es

   (a) 532 (b) 258 (c) 4308 (d) 153 (e) 0

9. Sea V un espacio vectorial complejo y $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas

   (i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

   (ii) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

   (iii) $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

   (iv) $\langle u, v + \lambda w\rangle = \langle u, v\rangle + \lambda\langle u, w\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

   (v) $\langle u + \lambda v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \lambda\langle u, v\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

   (a) Todas son válidas　(b) Solo (ii) y (iii)　(c) (ii), (iii), (iv), (v)

   (d) (ii), (iii), (v)　(e) Ninguna de las anteriores

10. Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. ¿Cuáles de las afirmaciones en los incisos (a) – (e) NO son todas equivalentes?

    (i) A es invertible.

    (ii) A tiene rango n^2.

    (iii) $\det A \neq 0$.

    (iv) La transformación lineal $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada $T_A(x) = Ax$ es uno a uno.

    (v) T_A es invertible.

    (vi) T_A es suprayectiva.

    (a) (i), (ii), (iii)　(b) (i), (iv)　(c) (v), (vi)　(d) (i), (iii), (v)

    (e) (iii), (vi)

11. Considere $\mathbb{R}^3$ con las bases $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$

    Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Entonces:

    (a) $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(b) $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$　(c) $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

    (d) $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(e) ninguna de las anteriores

12. ¿Cuál de las sigs. afirmaciones sobre la matriz real $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$ es falsa?

   (a) A es invertible.

   (b) Si $x \in \mathbb{R}^5$ y $Ax = x$, entonces $x = 0$.

   (c) La última fila de A^2 es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 625 \end{pmatrix}$.

   (d) A se puede transformar en la matriz identidad 5×5 por medio de operaciones elementales fila.

   (e) $\det(A) = 14400$.

13. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas?

   (i) T es continua en cero implica que T es continua en cualquier punto.

   (ii) T siempre es continua.

   (iii) T no siempre es continua.

   (iv) T es continua en un punto implica que T es continua.

   (v) Si $m > n$, entonces T nunca es uno a uno.

   (vi) Si $m > n$, entonces T nunca es suprayectiva.

   (a) Todas las afirmaciones son válidas

   (b) Solo son válidas (i), (ii), (iii), (iv).

   (c) Solo son válidas (i) y (iii).

   (d) Solo son válidas (i), (ii), (iv) y (vi).

   (e) Solamente (iii) es válida.

14. Considere el sistema de ecuaciones lineales con soluciones de la forma (w, x, y, z)

$$\begin{aligned} 2w + 6x + 4y + 4z &= 0 \\ w + 4x + y &= 0 \\ 3w + 5x + 10y + 14z &= 0 \\ 2w + 5x + 5y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

   (a) El sistema es consistente

   (b) El sistema tiene una infinidad de soluciones.

   (c) La suma de cualesquiera dos soluciones es solución.

   (d) $(-10, 2, 2, 0)$ es una solución.

   (e) Toda solución es un múltiplo escalar de $(-10, 2, 2, 0)$.

15. Si A es una matriz 3×3 con entradas reales, entonces

(a) A tiene al menos un valor propio real.
(b) A tiene tres valores propios distintos.
(c) El polinomio característico es igual al polinomio mínimo
(d) El determinante de A es positivo.
(e) La traza de A es cero.

16. Para todo n natural $\dfrac{4^n - 1}{3}$ es

(a) un entero (b) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ (c) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(d) Una sucesión convergente (e) Divisible por 3

17. El valor del límite $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cot x}$ es:

(a) $-\infty$ (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) $+\infty$

18. El valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$ es:

(a) 1 (b) $\dfrac{\pi}{4}$ (c) $\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\log 2$ (e) $\log \sqrt{2}$

19. ¿Para qué valor de x tiene la función $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (t^2 + t)\, dt$ un mínimo local?

(a) -2 (b) -1 (c) $-1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (d) $\dfrac{5}{6}$ (e) 1

20. El valor del límite $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}\, dt$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) 2 (e) 3

21. ¿Cuántos números reales positivos x satisfacen la ecuación $\operatorname{sen} 8x = x$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 7

22. El radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\pi^{2n}x^n$ es

(a) $\dfrac{1}{\pi^2}$ (b) $\dfrac{1}{\pi}$ (c) 1 (d) π (e) $+\infty$

23. Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface la siguiente propiedad:

$$\textbf{Para todo } \epsilon>0 \textbf{ existe } \delta>0 \textbf{ tal que}$$
$$|x-1|\geq\delta \quad \textbf{implica} \quad |f(x)-f(1)|\geq\epsilon.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre f es equivalente a la propiedad anterior?

(a) f es continua en $x=1$.
(b) f es discontinua en $x=1$
(c) f no es acotada.
(d) $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty}|f(x)|=\infty$
(e) $\displaystyle\int_0^{\infty}|f(x)|dx=\infty$

24. ¿Cuál es la 15-ésima derivada de $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$

(a) $\dfrac{x-15}{e^x}$ (b) $\dfrac{16-x}{e^{2x}}$ (c) $\dfrac{16-x}{e^x}$ (d) $\dfrac{x-16}{e^x}$ (e) $\dfrac{15-x}{e^x}$

25. Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $3x^3-24=\displaystyle\int_a^x h(t)\,dt$ para todo $x\in\mathbb{R}$, donde a es una constante. ¿Cual es el valor de a?

(a) 24 (b) 2 (c) 4 (d) -6 (e) 8

26. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales con la métrica dada d por

$$d(m,n)=\begin{cases}1 & \text{si } m\neq n\\ 0 & \text{si } m=n\end{cases}$$

para todo $m,n\in\mathbb{N}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el espacio métrico $(\mathbb{N},d)$?

(i) Si $n\in\mathbb{N}$, entonces $\{n\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{N}$.
(ii) Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es cerrado.
(iii) Toda función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ es continua.

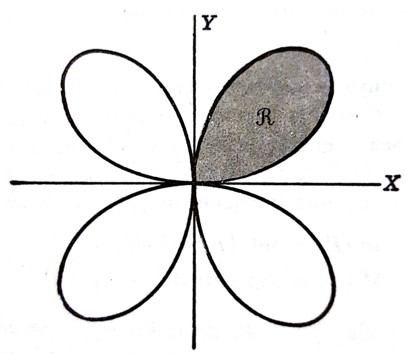
(a) Ninguna (b) Solo (i) (c) Solo (iii) (d) Solo (i) y (ii) (e) (i), (ii) y (iii)

27. El resultado de la operación $\dfrac{d}{dx}(\tan^5 x \sec^2 x)$ es

(a) $\dfrac{\tan^6 x}{6}$ (b) $5\tan^4 x\sec^4 x{+}2\tan^6 x\sec^2 x$ (c) $5\tan^4 x\sec^4 x{-}2\tan^6 x\sec^2 x$

(d) $\dfrac{\sec^3 x}{3}$ (e) $5\tan^4 x\sec^4 x$

28. La ecuación polar de la rosa de 4 pétalos de la figura es $r = |4\,\mathrm{sen}\, 2\theta|$



El área de la región sombreada es:

(a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) 2 (c) π (d) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} 4\,\mathrm{sen}\, 2\theta\, d\theta$ (e) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} 16\,\mathrm{sen}^2\, 2\theta\, d\theta$

29. Calcular $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{ye^{(x+h)y} - ye^{xy}}{h}$

(a) y^2e^{xy} (b) ye^{xy} (c) xe^{xy} (d) $e^{xy} + ye^{xy}$ (e) 0

30. Si f es una función continua tal que

$$\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para todo x, entonces una fórmula explícita para $f(x)$ es

(a) $\dfrac{(2x+2)e^{2x}}{1-e^{-x}}$ (b) $xe^{2x} + e^{-x}$ (c) $\dfrac{2xe^{2x} + e^{2x}}{1-e^{x}}$

(d) $\dfrac{2xe^{2x} + e^{2x}}{1-e^{-x}}$ (e) $\dfrac{2xe^{2x} + e^{2x}}{1+e^{-x}}$