Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

17 de julio de 2000

1. Algebra lineal

1.1 Considere la matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que la matriz A no es semejante a una matriz diagonal sobre los números reales.

(b) Probar que la matriz A no es semejante a una matriz diagonal sobre los números complejos.

Recuerde que una matriz A de tamaño $n \times n$ es semejante a una matriz diagonal sobre los números reales (o los números complejos) si existen D matriz diagonal y P matriz invertible ambas $n \times n$ con entradas reales (entradas complejas, respectivamente) tales que $A = PDP^{-1}$

1.2 Sea $\{v_1 \ldots v_n\}$ un conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^n$, es decir , $< v_i, v_i >= 1$ para todo i, y $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$. Pro bar que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

1.3 Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales reales de dimensión finita. Probar que $\dim V = \dim\, T(V) + \dim T^{-1}(0)$.

2. Cálculo

2.1 Calcular la deriva de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \int_{\sqrt{1+x^2}}^{x^3} t(t+1)dt$$

2.2 Sea $n \geq 1$ un entero y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función polinomial de grado n, es decir, existen constantes reales $a_n, \ldots, a_0$, con $a_n \neq 0$, tales que f es dada por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$. Probar que f es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $n = 1$.

2.3 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcin diferenciable con derivada continua. Probar que la restriccin de f a cualquier intervalo acotado es de Lipschitz. En otras palabras, pruebe que para todo intervalo acotado I existe una constante C (que depende de I) tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ para todo $x, y \in I$.

3. Problemas opcionales

3.1 Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G de índice 2. Probar que H es normal en G.

3.2 Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa para la cual existen constantes $A, B > 0$ y un entero $n \geq 0$ tales que $|f(z)| \leq A|z|_n + B$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual a n.

3.3 Sea X un espacio topológico conexo y locamente arco-conexo. Probar que X es arco-conexo.

3.4 Sea I un intervalo de la recta real. Probar que $L_2(I) \subset L_1(I)$ si y solo si I es d longitud finita. Recuerde que para todo número real $p \geq 1$ se define $L_p(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ es medible y } \int_I |f|^p < \infty\}$.