Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

25 de junio de 2010

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de la sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 2 horas.

I. Algebra lineal

1.1 ¿Para qué valores $t \in \mathbb{R}$ la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\ t & -\text{sen}\ t \\ \text{sen}\ t & \cos t \end{bmatrix}$$

no es invertible?

1.2 Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + 2y - z, 2x + y - z).$$

Encuentre los vectores $(z, x, y) \in \mathbb{R}^3$ y las constantes $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$T(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

1.3 Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y sea X el espacio de todos los polinomios reales de grado a lo más n. Dé una base para X y diga que transformaciones de las siguientes dos son lineales de X en X,

$$p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx} + x, \quad p(x) \mapsto \int_0^x p(y)dy,$$

con $p \in X$.

2. Cálculo

2.1 ¿Para qué valores $x \in \mathbb{R}$ la suma

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k$$

converge y cuál sería el límite cuando $n \to \infty$?

2.2 Demuestre que la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisface la siguiente relación

$$f(x) = x + \int_0^x (y - x) f(y) dy.$$

2.3 Use series de Taylor para calcular

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{x} \right).$$

3. Problemas opcionales

3.1 Calcule la integral compleja $\int_0^{2\pi} e^{it} \cos(e^{it}) dt$.

3.1 ¿Es un campo el conjunto de matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R},$$

con las operaciones usuales de suma y multiplicación?

3.3 Diga si el conjunto $\left\{ \frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots \right\}$ tiene un punto de acumulación (punto límite) en el conjunto $(0, 1)$.