# Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado

**30 de Junio de 2017**

**Nombre:** ________________________________________________________________

**Instrucciones:** En cada reactivo seleccione las respuestas correctas rellenando los círculos correspondientes. Para una misma pregunta pueden haber varios círculos correctos (rellene todos). Puede hacer cálculos en las hojas que se le proporcionaron.

**Duración del examen: 2 horas**

1. ¿ Cuál de los siguientes es un subespacio de $\mathbb{Q}^n$?

   ◯ $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde todos los $x_i$ son enteros$\}$;

   ◯ $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde $x_1$ o $x_2$ son cero$\}$;

   ◯ $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde $x_1 = 0\}$;

   ◯ $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde $3x_1 + 4x_2 = 1\}$.

2. Sea $V$ el espacio vectorial de todas las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$. La dimensión de $V$ es:

   ◯ finita;

   ◯ infinita.

3. Si $T : U \to V$ es una transformación lineal de $U$ en $V$ entonces

   ◯ el núcleo de $T$ es un subespacio de $U$;

   ◯ el núcelo de $T$ es un subespacio de $V$;

   ◯ la imagen de $T$ es un subespacio de $U$;

   ◯ la imagen de $T$ es un subespacio de $V$;

   ◯ $V$ es la imagen de $T$ si y solo si $\ker T = \{0\}$.

4. Sea $P_3$ el espacio vectorial de polinomios en $R$ de grado a lo más 3. Sea $D : P_3 \to P_3$ el operador diferencial definido por $D(p(t)) = dp/dt$. ¿Cuál de las siguientes es la matriz de $D$ con respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$.

   ◯ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   ◯ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   ◯ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5. Sean $A$ y $B$ dos matrices reales de $n \times n$. Sea $\operatorname{tr}(A)$ la traza de la matriz $A$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones siempre se cumple?

   ◯ $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;

   ◯ $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$;

   ◯ $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(ACB)$;

   ◯ $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

6. La matriz $\begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$ es

   ◯ triangular superior;

   ◯ ortogonal;

   ◯ simétrica;

   ◯ invertible.

7. Los vectores $(i+i, 2i)$ , $w = (1, 1+i)$ son

   ◯ linealmente dependientes;
   ◯ linealmente independientes;
   ◯ linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$;
   ◯ linealmente dependientes sobre $\mathbb{C}$.

8. Sean $u$, $v$ y $w$ vectores linealmente independientes. Entonces $u+v$, $u-v$ y $u-2v+w$:

   ◯ siempre son linealmente independientes;
   ◯ siempre son linealmente dependientes;
   ◯ podrían ser linealmente dependientes o independientes.

9. Sea $V$ el espacio vectorial de todo los polinomios en $t$ de grado menor o igual a $n$. Las siguientes son bases de $V$:

   ◯ $\{1, t, \dots, t^n\}$;
   ◯ $\{1, t-1, (t-1)^2, \dots, (t-1)^n\}$;
   ◯ $\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, \dots, t^{n-1}+t^n\}$.

10. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es una base para el subespacio $\mathbb{R}^4$ que consiste de todos los vectores ortogonales a $(0, 1, 1, 1)$ y $(1, 1, 1, 0)$.

    ◯ $\{(0, -1, 1, 0)\}$;
    ◯ $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$;
    ◯ $\{(-2, 1, 1, -2), (0, 1, -1, 0)\}$
    ◯ $\{(1, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}$;
    ◯ $\{(0, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}$.

11. Sea $V$ el espacio vectorial de funciones reales continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con producto interior definido por $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Sea $S = \{1, \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t, \dots\}$. Entonces

    ◯ $S$ es ortogonal;
    ◯ $S$ es ortonormal;
    ◯ $S$ es una base para $V$.

12. Considere a $V = \mathbb{Z}_3^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$. ¿Cuántos subespacios de dimensión 1 tiene $V$?

- ○ $(3^n - 1)$;
- ○ $3n$;
- ○ $(3^n - 1)/2$;
- ○ Ninguno, $V$ no es espacio vectorial.

13. Encuentre el polinomio característico de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- ○ $t^3 - t^2 - 2t + 28$;
- ○ $t^3 - t^2 + 2t$;
- ○ $t^3 + t^2 + 2t + 28$;
- ○ $t^3 - t^2 + 2t + 28$.

14. Un gráfo $G$ es un par $(V, E)$ donde $V = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto de vértices, y $E$ es un conjunto de pares de vértices llamados *aristas*. Si $\{i, j\} \in E$ decimos que $i$ y $j$ son adyacentes. Sea $A$ la matriz de $n \times n$ donde $A_{ij} = 1$ si $i$ es adyacente a $j$ y $A_{ij} = 0$ de otro modo. Supón que todo vértice de $G$ es adyacente exactamente con $d$ otros vértices. Entonces:

- ○ $A$ siempre es invertible;
- ○ $A$ es triangular superior;
- ○ $(1, \ldots, 1)$ es un eigenvector de $A$.

15. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; entonces

- ○ $B$ es diagonalizable con $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;
- ○ $B$ es diagonalizable con $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- ○ $B$ es diagonalizable con $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, y $P = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- ○ no es diagonalizable.

16. Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}:$$

- ○ ambas convergen;
- ○ ambas divergen;
- ○ la primera diverge y la segunda converge;
- ○ la primera converge y la segunda diverge.

17. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida recursivamente como sigue: $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$

- ○ diverge;
- ○ converge a 2;
- ○ converge a $\frac{2}{\sqrt{2}}$;
- ○ converge a $e$.

18. Calcular

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

- ○ $\infty$;
- ○ 1;
- ○ 0;
- ○ $\pi$.

19. Calcular

$$\lim_{x\to y} \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

- ○ 0;
- ○ $\infty$;
- ○ $ny^{n-1}$;
- ○ $nx^{n-1}$.

20. La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

- ○ es discontinua en $x = 0$;
- ○ es continua en todos los valores de $x$.

21. Encuentra la derivada con respecto a $x$ de $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

- ○ $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;
- ○ $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$;
- ○ $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;
- ○ $\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

22. Encuentra los máximos de la función $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

- ○ $x=2$ y $x=-2$;
- ○ $x=0$;
- ○ $x=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$;
- ○ $x=1$ y $x=-1$.

23. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la curva $y=\frac{x+1}{x^2+1}$?

- ○ 3;
- ○ 0;
- ○ 2;
- ○ 1.

24. ¿Cuáles de las siguientes rectas son asíntotas de la curva $y=\frac{3x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)$.

- ○ $x=0$;
- ○ $x=1/(3e)$;
- ○ $y=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2e}$;
- ○ $y=-\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}$.

25. Calcula la integral indefinida $\int\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

- ○ $\ln(1+e^x)+C$;
- ○ $x+\ln(1+e^x)+C$;
- ○ $x-\ln(1+e^x)+C$;
- ○ $x-\ln(1-e^x)+C$.

26. Calcula la integral indefinida $\int x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

- ◯ $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x}{2} + C$;
- ◯ $\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x}{2} + C$;
- ◯ $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) + \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x}{2} + C$;
- ◯ $\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x-1) + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x}{2} + C$.

27. Calcula el área acotada por las parábolas $x = -2y^2$ y $x = 1 - 3y^2$.

- ◯ $\sqrt{2}$;
- ◯ $\frac{4}{3}$;
- ◯ $\frac{3}{4}$;
- ◯ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

28. Calcula el plano tangente a la superficie $z = (\cos x)(\cos y)$ en el punto $(0, \pi/2, 0)$.

- ◯ $z + y = \pi/2$;
- ◯ $x + y = \pi/2$;
- ◯ $z - y = \pi/2$;
- ◯ $x - y = \pi/2$.

29. Calcula el volumen de del sólido acotado por la gráfica de la función $z = x^2 + y$, y los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 2$ y $z = 0$.

- ◯ $\frac{11}{6}$;
- ◯ 2;
- ◯ $\frac{13}{6}$;
- ◯ $\sqrt{2}$.

30. Calcula la matriz de derivadas parciales de $f(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$.

- ○ $\begin{pmatrix} e^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ x & e^y - \cos y \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$;
- ○ $\begin{pmatrix} xe^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ x & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$;
- ○ $\begin{pmatrix} e^y & e^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$;
- ○ $\begin{pmatrix} e^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$.