Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado
2021-I

Nombre: ____

Instrucciones: Para cada pregunta hay una y solo una respuesta correcta.
Duración del examen: 2 horas

1. Considera los siguientes conjuntos.

   1) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_3 = 2\}$;
   2) el conjunto de matrices de 2×2 tales que $\det(A) = 0$;
   3) el conjunto de polinomios $p(x)$ con $\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$;
   4) el conjunto de números reales con la suma dada por $x \oplus y = xy$ y la multiplicación por escalares dada por $a \otimes x = x^a$.

   ¿Cuál de las siguientes es la lista completa de los espacios vectoriales?

   a) 1);
   b) 1) y 2);
   c) 3) y 4);
   d) 3).
   e) 2)

2. Si $T : U \to V$ es una transformación lineal de U en V entonces

   a) el núcleo de T es un subespacio de V;
   b) la imagen de T es un subespacio de U;
   c) el núcleo de T es un subespacio de U;
   d) la imagen de T es un subespacio de U;
   e) V es la imagen de T si y solo si $\ker T = \{0\}$.

3. Un espacio vectorial V tiene 4 vectores que lo generan pero que son linealmente dependientes. De esta información se sigue que:

   a) $\dim(V) = 3$;
   b) $\dim(V) \leq 3$;
   c) $\dim(V) = 4$;
   d) $\dim(V) < 3$;
   e) $\dim(V) \leq 4$;

4. Sea P_3 el espacio vectorial de polinomios en R de grado a lo más 3. Sea $D : P_3 \to P_3$ el operador diferencial definido por $D(p(t)) = dp/dt$. ¿Cuál de las siguientes es la matriz de D con respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$.

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5. Sea V el espacio vectorial de los números reales sobre el campo de los números racionales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera?

   a) $\dim(V)$ es numerable;

   b) $\dim(V)$ no es numerable;

   c) $\dim(V) = 1$;

   d) V no tiene base.

   e) V no es un espacio vectorial.

6. Calcula el determinante de $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ x^8 & x^9 & x^4 \\ x^7 & x^6 & x^5 \end{pmatrix}$.

   a) 0;

   b) x^{19};

c) $-x^{19}+x^{18}+x^{17}-x^{16}$;

d) $-x^{19}+x^{17}+x^{13}-x^{11}$;

e) $-x^{19}$

7. Sea A una matriz real de 4×4 tal que $-1,1,-2,2$ son sus eigenvalores. Sea $B = A^4-5A^2+5I$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

   a) $\det(A+B)=0$;

   b) $\det(B)=1$;

   c) $\operatorname{tr}(A+B)=1$;

   d) $\operatorname{tr}(A-B)=0$;

   e) $\operatorname{tr}(A+B)=4$;

8. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, equipado con el producto interno:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

   ¿Cuál de las siguientes es una base ortonormal para V?

   a) $\operatorname{sen}(t),\cos(t)$;

   b) $1,t,t^2$;

   c) $1,t,\frac{t^2}{\sqrt{2}}$;

   d) $1,2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2}),6\sqrt{5}(t^2-t+\frac{1}{6})$;

   e) $1,(t-\frac{1}{2}),(t^2-t+\frac{1}{6})$.

9. Sea A una matriz de $n\times n$ y λ un valor propio de A con vector propio v. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) v es un vector propio de $-A$ con valor propio de $-\lambda$.

   b) Si B es una matriz de $n\times n$ y μ es valor propio de B, entonces $\lambda\mu$ es un valor propio de AB.

   c) Sea c un escalar. Entonces $(\lambda+c)^2$ es valor propio de $A^2+2cA+c^2I$.

   d) Si μ es valor propio de una matriz B de $n\times n$, entonces $\lambda+\mu$ es un valor propio de $A+B$.

   e) $-\lambda$ es una raíz del polinomio característico de A.

10. Sea A una matriz de 5×5 con entradas reales y $x\neq 0$. Entonces los vectores x,Ax,A^2x,A^3x,A^4x,A^5x son

a) linealmente independientes.
b) linealmente dependientes.
c) linealmente independientes si y solo A es simétrica.
d) linealmente independientes si y solo A es invertible.
e) no se puede determinar la dependencia lineal de la información dada.

11. Supongamos que la matriz A es semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

    a) $A^2 = A$;
    b) $\det(A) = 0$;
    c) $\text{traza}(A) = 1$;
    d) $\lambda = 0$ es un valor propio de A;
    e) $\lambda = 1$ es un valor propio de A.

12. Sea A una matriz real 3×3. ¿Cuál de las siguientes condiciones NO implica que A es invertible?

    a) $-A$ es invertible.
    b) Existe un entero positivo k tal que $\det(A^k) \neq 0$.
    c) Existe un entero positivo k tal que $(I - A)^k = 0$, donde I es la matriz identidad 3×3.
    d) El conjunto de los vectores de la forma $A\mathbf{v}$, con $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, es $\mathbb{R}^3$.
    e) Existen 3 vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $A\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ para todo i.

13. Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} :$$

    a) ambas convergen;
    b) ambas divergen;
    c) la primera diverge y la segunda converge;
    d) la primera converge y la segunda diverge;
    e) la primera converge a $\pi/2$ y la segunda converge a $\pi/3$.

14. Sea

$$a_n = n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^n \frac{\cos(n)}{n}.$$

    ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto para la sucesión $\{a_n\}$.

a) converge a un número negativo;

b) converge a 0;

c) esta acotada pero no converge;

d) converge a un número positivo;

e) diverge.

15. Calcular

$$\lim_{x \to y} \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

a) 0;

b) ∞;

c) e;

d) ny^{n-1};

e) nx^{n-1}.

16. Supongamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$3x^5 + 96 = \int_c^x g(t)\, dt$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde c es una constante. ¿Cuál es el valor de c ?

a) -96;

b) -2;

c) 4;

d) 15;

e) 32;

17. ¿Cuánto vale

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|x|<n} \int_{|y|<n} \sin\left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy?$$

a) π;

b) $-\pi$;

c) 0;

d) 1;

e) no converge;

18. ¿Cuál es la derivada número 19 de $\dfrac{x-1}{e^x}$?

a) $(18-x)e^{-x}$;

b) $(19-x)e^{-x}$;

c) $(20-x)e^{-x}$;

d) $(x-19)e^{-x}$;

e) $(x-20)e^{-x}$;

19. Sea $y(x)$ una solución a la ecuación diferencial $\sqrt{x^2+1}dy-(x/y)dx=0$ que satisface $y(\sqrt{3})=3$. ¿Cuánto vale $(y(\sqrt{8}))^2$?

    a) 8;

    b) 6;

    c) 11;

    d) 64;

    e) 13.

20. Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones paramétricas

$$x(t)=\cos(e^t);$$
$$y(t)=\operatorname{sen}(e^t);$$
$$z(t)=e^t;$$

con $t\in[0,2]$ ¿Qué longitud tiene la curva?

a) $\int_0^2\sqrt{1+e^{2t}}dt$;

b) e^4-1;

c) $\frac{e^4+3}{2}$;

d) $\sqrt{2}(e^2-1)$;

e) 1;

21. Calcula el área acotada por las parábolas $x=-2y^2$ y $x=1-3y^2$.

    a) $\sqrt{2}$;

    b) 1;

    c) $\frac{4}{3}$;

    d) $\frac{3}{4}$;

    e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[0,1]$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

$$\text{I.- } \int_0^1 f(x^2)dx = \int_0^1 (f(x))^2 dx$$
$$\text{II.- } \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\int_0^1 f(x)dx$$
$$\text{III.- } \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

a) ninguna;

b) todas;

c) I;

d) II;

e) III.

23. Sea $u = xy^z$. Calcula

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

a) $3u$;

b) $u(1+z+z^2/y)$;

c) $u(1+z^2/y+y\ln z)$;

d) $u(1+z+z\ln y)$.

e) 0;

24. Sea $f(x,y) = xe^y/(xy+3)$ para $xy > 0$. Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$.

a) e^y/y;

b) $-3e^y/(xy+3)^2$;

c) $3e^y/(xy+3)^2$;

d) $(2xye^y+3e^y)/(xy+3)^2$;

e) $-(2xye^y+3e^y)/(xy+3)^2$;

25. Sea G un grupo finito tal que para todo par de subgrupos H, K de G se tiene que $H \subset K$ o $K \subset H$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

a) G es cíclico de orden primo.

b) G podría no ser abeliano.

c) G es un grupo cíclico de orden la potencia de un primo.

d) G solo tiene dos subgrupos.

e) G es alternante.

26. ¿Cuál de las siguientes funciones define una métrica en $\mathbb{R}$?

    a) $d(x, y) = xy$;

    b) $d(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$

    c) $d(x, y) = (x - y)^2$.

    d) $d(x, y) = 0$ si $x = y$ y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

    e) $d(x, y) = x^y$.

27. Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left| e^{\frac{2\pi i k}{n}} - e^{\frac{2\pi i (k-1)}{n}} \right|.$$

    a) 0;

    b) 2π;

    c) π;

    d) $2i$;

    e) $2e$;

28. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que satisface que

$$a_0 = 1 \text{ y } a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

    a) $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

    b) $xf^2(x) - xf(x) + 1 = 0$.

    c) $f^2(x) + xf(x) - 1 = 0$;

    d) $f^2(x) - xf(x) + 1 = 0$.

    e) $xf^2(x) + f(x) - 1 = 0$;

29. Considera el siguiente conjunto de matrices

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} s & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \text{ y } s \in \{-1, 1\} \right\}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) G es un grupo bajo la suma de matrices;

b) G es un grupo abeliano bajo multiplicación de matrices;

c) Todo elemento de G es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$;

d) G es un grupo finitamente generado bajo multiplicación de matrices;

e) El determinante de todo elemento de G es igual a 1;

30. Todo grupo de orden 24 satisface lo siguiente.

a) Tiene un subgrupo normal de orden 4 o 8.

b) Tiene un subgrupo normal de orden 4 y un subgrupo normal de orden 8.

c) Tiene un subgrupo normal de orden 4.

d) Tiene un subgrupo normal de orden 8.

e) Es abeliano.